RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO: UNA ALTERNATIVA A BHASKARA

Hergatacorzian, Alejandra - Alarcón, Cecilia

hergata@gmail.com - cecilia.a2907@gmail.com

Instituto de Profesores Artigas, Uruguay

Tema: Historia de la Matemática

Modalidad: T

Nivel: Medio (de 11 a 17 años)

Palabras clave: historia, geometría, ecuación de segundo grado

Resumen

El taller consistirá en un recorrido histórico de los métodos de resolución de la ecuación de segundo grado, centrándonos en el método geométrico, sin dejar atrás el algebraico, que es el que solemos usar hoy en día. Se trabajará el contexto histórico en el que surgieron y citaremos algunos matemáticos que durante ese período intervinieron en el desarrollo de los métodos de resolución. Abordaremos desde la civilización babilónica, quienes fueron los primeros conocidos en resolver ecuaciones de segundo grado, pasando por el trabajo de Euclides, la obra de Al-Jwarizmi y el trabajo de Brahmagupta. Creemos que la resolución geométrica es más intuitiva para el estudiante y puede generar un acercamiento del mismo a la matemática mediante la motivación y el interés. Además, consideramos que es importante valorizar a la geometría como medio de aprendizaje. La resolución geométrica, y su confrontación con la resolución algebraica, permite utilizar como recurso para la enseñanza del tema en el aula a la historia de la matemática. Con ella se pretende también contextualizar los contenidos que enseñamos y valorizar sus orígenes.

Introducción

El origen conocido de la ecuación de segundo grado y su resolución se remonta a la civilización babilónica. En las tablillas, lo que se considera los textos matemáticos de los babilonios, se encontraron problemas que se resuelven utilizando ecuaciones de segundo grado. Estos problemas se refieren a situaciones prácticas de la vida cotidiana.

Cabe destacar que tanto en la formulación como en la resolución de estos problemas no se utilizaban símbolos. Tampoco se explicaba cómo se llegaba a la respuesta, sino que esta se daba como una "receta matemática". Además, de acuerdo al cometido, las soluciones negativas no se tenían en cuenta; por dos motivos: no eran parte de su sistema numérico y una solución negativa no tenía significado en la vida práctica. Por lo tanto, con el lenguaje algebraico de la actualidad, estos problemas se reducen a resolver tres tipos de ecuaciones: $x^2 + bx = c; x^2 = bx + c; x^2 + c = bx$, con b y c positivos.

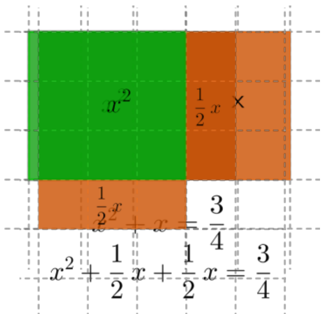
La ecuación de segundo grado en los babilonios

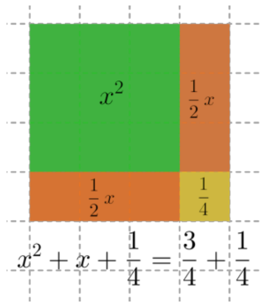
El primer registro conocido de resolución de problemas que involucra lo que hoy llamamos ecuación de segundo grado data del 1700 a.C. En la tablilla BM 13901, que se encuentra en el Museo Británico, aparece el siguiente problema: "*He sumado la superficie y mi lado de cuadrado: 45*"

Recordamos que esta civilización utilizaba un sistema de numeración sexagesimal, lo cual se traduciría a: he sumado la superficie y mi lado de cuadrado: $\frac{3}{4}$. Esto equivale a resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + x = \frac{3}{4}$

La solución a este problema, que aparece en la tablilla, traducida a nuestro sistema de numeración es: Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1 (=½). Multiplicarás ½ por ½ (=¼). Agregarás ¼ a ¾ (=1). 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el ½ que has multiplicado de 1 (=½). ½ es el lado del cuadrado.

También esta solución se puede interpretar geométricamente de la siguiente manera:





Entonces, mediante transformaciones, llegamos a que $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$. Esto es igual a decir que el lado del cuadrado es 1, por lo que $x = \frac{1}{2}$

Esta forma se conoce en la actualidad como "completar el cuadrado". Este tipo de resolución nos hace pensar que sólo trabajaban con ecuaciones donde el coeficiente del término de segundo grado era uno, pero esto no es así. Dice Boyer: "en otro texto los babilonios se arreglan para reducir la ecuación $11x^2 + 7x = 6; 15$ a la forma canónica $x^2 + px = q$, multiplicando primero por 11 los dos miembros para convertirla en la

$(11x)^2 + 7(11x) = 1{,}8; 45$, que es la forma canónica salvo que la incógnita es ahora $y = 11x$…" es decir, realizando lo que hoy conocemos como un cambio de variable.

La ecuación de segundo grado en Euclides

Se sabe muy poco de la vida personal de Euclides, no así de su extensa obra. Si bien las fechas no son exactas, podemos decir que vivió durante los siglos III y II a.C. Fue uno de los matemáticos más importantes de la Antigüedad.

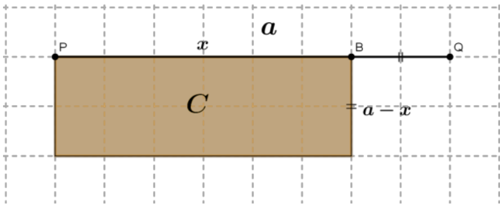
Euclides y su obra ***Los Elementos*** son referencias inseparables. Existía una necesidad de poner orden y sistematizar todos los conocimientos y reflexiones acerca de cuestiones matemáticas acumuladas hasta el momento. Fue Euclides quien dio ese paso, y su obra es leída hasta el día de hoy.

En la obra de Euclides aparecen construcciones o problemas geométricos que corresponden a la resolución de ecuaciones de segundo grado. Algunos historiadores consideran estos tipos de problemas como problemas de álgebra en forma geométrica, destacando la preferencia griega por la geometría. Se cree que Euclides tomó los conocimientos babilónicos sobre la resolución de ecuaciones de segundo grado, pero con una diferencia:

> Los matemáticos griegos habrían dado así con una traducción geométrica que les permitía formular los problemas de manera general y no, como en la matemática de Mesopotamia, en casos numéricos concretos relativos a situaciones prácticas como la medida de un terreno; y obtener demostraciones allí donde en Babilonia se disponía sólo de recetas para hallar las soluciones. (Millán Gasca, 2004, p.78).

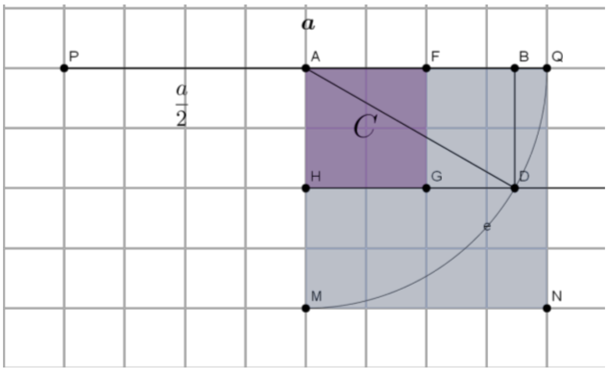
En la proposición 28 del libro VI, encontramos lo siguiente: *"Dividir una recta dada de manera que el rectángulo contenido por sus segmentos sea igual a un espacio dado. Ese espacio no debe ser mayor que el cuadrado de la bisección de la línea."*

La resolución de Euclides se basa en varias propiedades anteriores, las cuales no vamos a detallar, pero sí realizaremos algunas observaciones con respecto a la letra de la proposición. Primero, Euclides considera el "espacio" dado como el área de un cuadrado. Por otra parte, lo que se pide es determinar un punto interior a un segmento dado, tal que el área del rectángulo determinado por los dos nuevos segmentos que surgen de dividir el segmento dado sea igual al área del cuadrado C. Además, el área dada ("espacio") debe ser menor al área del cuadrado de lado igual a la mitad del segmento dado.



Si consideramos a, la medida del segmento dado, y C, el área dada, podemos traducir la proposición 28 como la resolución de la siguiente ecuación de segundo grado $x(a-x) = C$ o lo que es lo mismo $ax = x^2 + C$, teniendo en cuenta que $C < \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

A continuación, escribiremos la solución propuesta por Euclides, sin detenernos en la justificación de la construcción.



Euclides propone trazar el cuadrado $AQNM$, de lado la mitad del segmento dado ($\frac{a}{2}$), siendo A el punto medio del segmento PQ (el segmento dado). Luego, "dentro de él", trazar otro cuadrado $(AFGH)$, de área C. De esta forma, se garantiza que el área C sea menor al área del cuadrado de lado $\frac{a}{2}$. Luego, se traza el punto D, intersección de la recta GH con la circunferencia de centro A y radio $\frac{a}{2}$, de forma que $\overline{AD} = \frac{a}{2}$. Por último, determina el punto buscado B, como la proyección de D sobre el segmento dado PQ.

Tomando el triángulo ABD, y aplicando el Teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \overline{AB}^2 + C \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C}$$

Euclides, dada la construcción que realiza, determina dos valores para x, que se obtienen como la suma o la resta de $\frac{a}{2}$ y la medida de $\overline{AB}$.

Es decir, $x_1 = \overline{PA} + \overline{AB} \Longrightarrow x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C}$ y $x_2 = \overline{AQ} - \overline{AB} \Longrightarrow x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C}$

Encontramos aquí las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $ax = x^2 + C$.

Es interesante observar la condición que Euclides propone en su proposición. Nos dice que "ese espacio no debe ser mayor que el cuadrado de la bisección de la línea". Es decir $C < \left(\frac{a}{2}\right)^2$, o de otra forma $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C > 0$. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C$ es lo que hoy conocemos como "discriminante", y la condición anterior no es otra cosa que la condición para que una ecuación de segundo grado tenga dos raíces reales.

La ecuación de segundo grado en Al-Jwarizmi

Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi (780 - 850 aproximadamente), es el matemático árabe más conocido. Su nombre ha dado lugar a las palabras algoritmo y guarismo. Fue miembro de la Casa de la Sabiduría, una universidad comparable al antiguo Museo de Alejandría. La obra más relevante e influyente es su tratado de álgebra, cuya aparición data entre los años 813 y 830. Por primera vez aparece la palabra "álgebra" en un título para designar una disciplina matemática distinta, dotada de una terminología propia. El título completo del tratado es ***al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*** y está compuesto de tres partes. Una de ellas es propiamente algebraica y trata sobre la resolución de ecuaciones.

La palabra *jabr* significa restaurar, que en el contexto de las ecuaciones algebraicas podríamos identificarlo con la transposición de términos para luego reducir; la expresión *al-muqabala* significaría lo que en la actualidad denominamos cancelar y consistiría en la eliminación de términos iguales cuando aparecen en ambos miembros de una ecuación. Hoy en día hablamos de la ecuación de segundo grado y de la fórmula que lo resuelve sin preocuparnos del signo de los coeficientes. Pero Al-Jwarizmi no concibe más que sumas en ambos miembros de la igualdad, lo cual lo lleva a considerar tres géneros diferentes de ecuaciones de segundo grado completas, que con los otros tres de ecuaciones incompletas hacen un total de seis que resumiremos en la siguiente tabla.

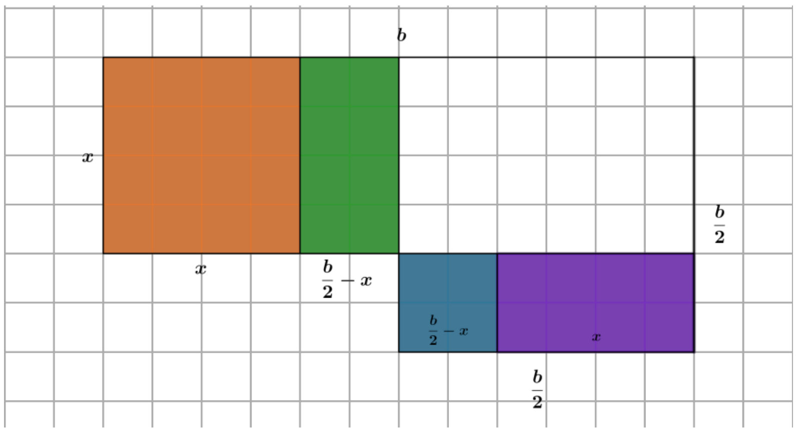
Cuadrado de la cosa igual a cosas	$x^2 = bx$
Cuadrado de la cosa igual a número	$x^2 = c$
Cosas igual a número	$bx = c$
Cuadrado de la cosa más cosas igual a número	$x^2 + bx = c$
Cuadrado de la cosa más número igual a cosas	$x^2 + c = bx$
Cuadrado de la cosa igual a cosas más número	$x^2 = bx + c$

En la primera columna están las ecuaciones en forma retórica, tal como aparecen en el texto. Cuando se habla de "la cosa" se refiere a la incógnita. En todas ellas suponemos que $a = 1$ porque el matemático siempre hace que el coeficiente del cuadrado de la incógnita sea la unidad, aun a costa de convertir b y c en fracciones.

En el libro, además de dar ejemplos de los seis tipos de ecuaciones se explica cómo resolverlas.

A continuación veremos la demostración de una de las ecuaciones: *"Cuadrado de la cosa más número igual a cosas"*.

Para resolver la ecuación $x^2 + c = bx$ dibuja un rectángulo de base b y altura x que divide en dos partes iguales (una de color anaranjado y verde, y otra de color blanco). La parte anaranjada es un cuadrado de lado x y la parte verde un rectángulo de altura x y base $\frac{b}{2} - x$ (suponiendo que x es menor que $\frac{b}{2}$). La parte blanca, se completa hasta formar un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$. Ese rectángulo añadido se puede descomponer en un cuadrado de lado $\frac{b}{2} - x$ (de color celeste) y un rectángulo de altura $\frac{b}{2} - x$ y base x (rectángulo violeta). Entonces tenemos que: el área del rectángulo inicial es bx, el área del cuadrado anaranjado es x^2, el área del cuadrado añadido celeste es $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2$, el área verde es igual al área violeta y el área del cuadrado final de lado $\frac{b}{2}$ es $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, compuesto por el rectángulo blanco, el cuadrado celeste y el rectángulo violeta. Además sabemos que $x^2 + c = bx$, por lo tanto, $bx - x^2 = c$. Es decir, el cuadrado inicial menos el anaranjado, es igual a la suma del rectángulo verde con el cuadrado blanco (o sea, el c). Ahora, recordando que el cuadrado verde es igual al violeta, tenemos que $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + c$, que al despejar la incógnita resulta que $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.



Lo interesante de esta ecuación es que tiene otra solución que Al-Khowarizmi no la ignora sino que requiere de una construcción distinta a la anterior.

La ecuación de segundo grado en Brahmagupta

Podemos situar a Brahmagupta dentro del siglo VI, en pleno esplendor de la matemática hindú. Dentro de su obra podemos mencionar algunos hechos relevantes, entre ellos, el haber sistematizado, por primera vez en la historia, el cálculo con números negativos y el cero. Si bien los griegos tenían una concepción del vacío y utilizaban una posible "regla de los signos" cuando restaban, fue Brahmagupta quien la enunció explícitamente. Un hecho interesante a destacar es que Brahmagupta utiliza un álgebra sincopada, es decir, que se abrevian las palabras y se comienzan a usar símbolos. Por ejemplo, las incógnitas las representa por medio de abreviaturas de las palabras correspondientes, la resta la representa colocando un punto sobre el sustraendo, etc.

Para resolver la ecuación de la forma $ax^2 + c = bx$, enuncia el siguiente método:

"Dejar el número en un lado y en el otro el cuadrado de la incógnita menos la incógnita. Multiplica el número por cuatro veces el coeficiente del cuadrado, súmalo al cuadrado del coeficiente del término medio, y la raíz de esto menos el coeficiente del término medio dividido por dos veces el coeficiente del cuadrado es el valor de la incógnita". (Moreno, 2011, p.60)

Si partimos de la ecuación de la forma $ax^2 + c = bx$, y realizamos la primera transformación que describe Brahmagupta, obtenemos la ecuación $ax^2 - bx = -c$. Ahora, generalizando las instrucciones mencionadas, llegamos a una fórmula muy similar a la utilizada hoy en día. Es decir: $4a(-c) = -4ac \Leftrightarrow (-b)^2 + (-4ac) = (-b)^2 - 4ac \Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{(-b)^2-4ac}-(-b)}{2a} = \frac{b+\sqrt{(-b)^2-4ac}}{2a}$

Esto último resulta ser la fórmula utilizada hoy en día para la ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 - bx + c = 0$. Observamos que si bien Boyer menciona que Brahmagupta trabaja con las dos raíces incluyendo a las negativas, en este caso el matemático trabaja con una ecuación que, por su forma, admite dos raíces positivas y además en su procedimiento se menciona una sola raíz. Brahmagupta no se detiene a justificar el porqué de este procedimiento, sino que lo da como una regla práctica, es decir, si se comprueba, se considera válida.

CONCLUSIONES

Nos interesa destacar la importancia de conocer e investigar el contexto y la perspectiva histórica de los contenidos que enseñamos, para poder tener una aproximación a los mismos desde un lado más humano y comprenderlos de otra manera.

Por otra parte, el análisis histórico nos lleva a preguntarnos por qué el álgebra y la geometría se ven tan distanciados hoy en día en la educación matemática, si a lo largo de la historia esto no fue así. Nos invita a pensar por qué no utilizar la geometría como herramienta para resolver problemas algebraicos y el álgebra como herramienta para resolver problemas geométricos.

Hoy en día, cuando se trabaja con la resolución de ecuaciones (sobre todo las de segundo grado), el alumno suele emplear reglas aprendidas que mecanizan la resolución, perdiendo el sentido y la interpretación de lo que realiza. Por esto, consideramos que es importante para la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones el trabajo en resolución de problemas. Por lo tanto, nos parece interesante la idea de proponer en el aula un conjunto de situaciones que permitan ver las fórmulas algebraicas utilizando relaciones geométricas. Para esto necesitamos un trabajo sistemático con la geometría, reconociendo las diferencias entre estas dos formas de trabajo e identificando las limitaciones de su utilización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Jwarizmi, M. b. M. (2009). *El libro del Álgebra*. Traducción, introducción y notas de Ricardo Moreno Castillo. Madrid: Nivola

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Dalcín, M.y Olave, M. (2012). *Gente en Obra. Historia interactiva de los orígenes de la matemática*. Montevideo: Palíndromo.

Milán, A. (2004). *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*. España: Nivola.

Moreno, R. (2010). *Al-Jwarizmi. El algebrista de Bagdad*. España: Nivola.

Moreno, R. (2011). *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskara. Tres matemáticos de la India*. España: Nivola.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.